UNIVERSITÉ LIBANAISE

Faculté des Beaux-Arts et d'Architecture

- Le doyen -

الجامعــة اللبنانيــة

كلية الفنون الجميلة والعمارة

- العمادة -

مباراة الدخول الى معهد الفنون الجميلة للعام 2018-2019

قسم الهندسة المعمارية **مسابقة في الرياضيات (فرنسي)** **المدة: ساعتان**

Toutes les CALCULATRICES sont interdites.

Exercice I. ANALYSE. ▶ 14 points

Soient f et g deux fonctions définies sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = e^{\frac{-1}{x}}$ et $g(x) = \dfrac{e^{\frac{-1}{x}}}{x^2}$. On désigne par (C_f) et (C_g) les courbes représentatives, respectivement, des fonctions f et g. On donne $e^{-2} = 0.13$.

Étude du fonction g.

1. Déterminer $\lim\limits_{x\to\pm\infty} g(x)$, $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x)$ et $\lim\limits_{x\to 0^-} g(x)$. En déduire les asymptotes à (C_g).
2. Dresser le tableau de variation de g.
3. Déterminer le point (x_0, y_0) où la fonction g admet un extremum local et indiquer la nature de cet extremum.
4. En déduire la position de la courbe (C_g) par rapport à l'asymptote horizontal.
5. Tracer (C_g).

Étude du fonction f.

6. Déterminer $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$. En déduire les asymptotes à (C_f).
7. Dresser le tableau de variation de f et déterminer la position de la courbe (C_f) par rapport à l'asymptote horizontal.
8. Tracer (C_f).

Aire d'un domaine. On note par $\mathcal{A}$ l'aire du domaine limité par (C_g), l'axe $x'Ox$ et la droite $x = 0$. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on donne $\mathcal{A}_n = \displaystyle\int_0^n g(x)\,dx$.

9. Donner une interpretation géométrique de $\mathcal{A}_n$.
10. Calculer $\mathcal{A}_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathcal{A}_n$. En déduire la valeur de $\mathcal{A}$.

Exercice II. VRAI OU FAUX AVEC JUSTIFICATION. ▶ 8+4+8 points

Pour chacune des propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et **justifier** votre réponse. Toutes les propositions sont indépendantes. *Une réponse seulement par vrai ou faux, sans justification, n'est pas prise en considération.*

COMPLEXE. Soient $z = x + iy = re^{i\theta}$ et $z' = x' + iy' = r'e^{i\theta'}$ deux nombres complexes **non nuls**. On définit $\varphi(z, z') = z\overline{z'} + \overline{z}z'$.

1. Si $|z|^2 = z^2$ alors z est un réel.
2. Si z est un imaginaire pur alors $|z|^2 = -z^2$.
3. $\varphi(z, z') = 2(xx' + yy')$.
4. $\varphi(z, z') = 2rr'\sin(\theta - \theta')i$.
5. Si z est un réel et z' est un imaginaire pur alors $\varphi(z, z') = 0$.
6. L'ensemble des points $M(z)$ tels que $\varphi(z, 1+i) = 2\sqrt{2}$ est la droite d'équation $x + y = \sqrt{2}$.
7. $\varphi(\overline{z}, \dfrac{1}{z}) = 2$.
8. L'ensemble des points $M(z)$ tels que $\varphi(z, z-2) = 2$ est le cercle $\mathcal{C}\Big((1,0); R = \sqrt{2}\Big)$.

Probabilité. Une urne contient 8 boules (3 rouges et 5 noires) et 6 cubes (2 rouges et 4 noirs). On tire deux objets simultanément, en supposant que les tirages sont équiprobables. **Deux objets sont identiques s'ils ont même forme et même couleur.**

9. La probabilité de tirer un cube et une boule de couleurs différentes est $\frac{22}{91}$.
10. La probabilité de tirer un cube et une boule de même couleur est $\frac{69}{91}$.
11. La probabilité de tirer deux objets identiques est $\frac{20}{91}$.
12. La probabilité de tirer au moins une boule noire est $\frac{45}{91}$.

Géométrie. Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on donne :

Les plans :

- ▷ (P_θ) d'équation $y - x = \sin^2\theta\,;\ \theta \in \mathbb{R}$,
- ▷ (Q_θ) d'équation $z - y = \cos^2\theta\,;\ \theta \in \mathbb{R}$,
- ▷ (R) d'équation $x - y - 2z + 1 = 0$,

et les droites :

- ▷ (E) d'équation $x = 1 + \lambda$, $y = -2 - \lambda$ et $z = 4 + 3\lambda\,;\ \lambda \in \mathbb{R}$,
- ▷ (Δ_θ) est la droite d'intersection des plans (P_θ) et (Q_θ).

13. La droite (E) passe par le point $I(1, -1, 3)$.
14. (E) coupe (R) en un seul point.
15. Pour tout θ, (Δ_θ) est contenue dans le plan d'équation $z - x - 1 = 0$.
16. Pour tout θ, (Δ_θ) passe par le point $A(-1, -\cos^2\theta, 0)$.
17. Le plan d'équation $3x + 2y + z - 5 = 0$ est parallèle à (R).
18. Le plan, contenant (E) et perpendiculaire à (R), a pour équation $x + y + 1 = 0$.
19. Pour tout θ, le vecteur $(1, -1, 0)$ est orthgonal à (Δ_θ).
20. Pour tout θ, (Δ_θ) est orthogonale au plan d'équation $x + y + z - 3 = 0$.

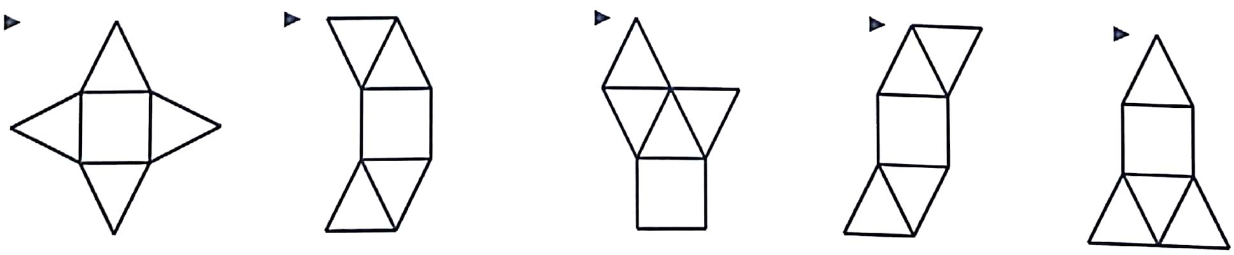
Exercice III. **Choisir une bonne réponse <u>sans</u> Justifier.** ▶ 6 points

Dans l'exercice suivant, une **seule** des réponses proposées est correcte. *Écrire le numéro de chaque question, puis écrire ou tracer la réponse qui lui correspond, sans justification.*

Q1. Si $x^2 - 4x + 2 = 0$, alors combien vaut $x + \dfrac{2}{x}$?

▶ -4 ▶ -2 ▶ 0 ▶ 2 ▶ 4

Q2. Lequel des cinq patrons proposés n'est pas celui d'une pyramide ?



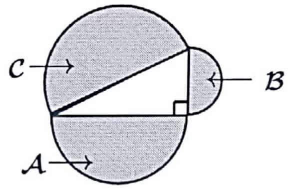
Q3. Combien vaut $\dfrac{2^{2014} - 2^{2013}}{2^{2013} - 2^{2012}}$?

▶ 2^{2011} ▶ 2^{2012} ▶ 2^{2013} ▶ 1 ▶ 2

Q4. La figure montre en gris trois demi-disques dont les diamètres sont respectivement les trois côtés d'un triangle rectangle. Si $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ désignent les aires, en cm^2, de ces trois demi-disques, laquelle des relations suivantes est nécessairement vraie ?

▶ $\mathcal{A} + \mathcal{B} < \mathcal{C}$ ▶ $\mathcal{A} + \mathcal{B} = \mathcal{C}$ ▶ $\sqrt{\mathcal{A}} + \sqrt{\mathcal{B}} = \sqrt{\mathcal{C}}$

▶ $\mathcal{A}^2 + \mathcal{B}^2 = \mathcal{C}^2$ ▶ $\mathcal{A}^2 + \mathcal{B}^2 = \mathcal{C}$



Q5. Dans le plan rapporté à un repère orthonormé, on considère les courbes représentatives des fonctions $f(x) = 2 - x^2$ et $g(x) = x^2 - 1$. En combien de régions ces deux courbes partagent-elles le plan ?

▶ 3 ▶ 4 ▶ 5 ▶ 6 ▶ 7

Q6. Deux cylindres identiques de volume V_1 sont coupés suivant une ligne verticale en pointillé et sont collés ensemble pour former un unique cylindre plus grand de volume V_2 (voir figure). Quel est le rapport $\frac{V_2}{V_1}$ du volume du grand cylindre au volume d'un des cylindres initiaux ?

▶ 2 ▶ 3 ▶ π

▶ 4 ▶ 8