الجامعة اللبنانية
معهد الفنون الجميلة

مباراة الدخول الى معهد الفنون الجميلة للعام ٢٠١٧-٢٠١٨

قسم الهندسة المعمارية   مسابقة في الرياضيات (فرنسي)   المدّة: ساعتان

I-(9 points) Le plan complexe est rapporté à un repère direct orthonormé $(O;\vec{u},\vec{v})$.

On considère le point M d'affixe $z = x + iy$, ou $x \; et \; y$ sont réels.

1- a) Montrer que si : $\boldsymbol{Re[\,z(1+i)\,] + z\,\bar{z} = 0}$, alors M appartiens à un cercle dont le centre et rayon à déterminer.

b) Montrer que si : $\boldsymbol{Im[\,(2-i)z\,] = 1}$, alors M appartiens à une ligne droite dont l'équation à déterminer.

c) Montrer qu'il n'existe pas un nombre complexe z, tel que $\boldsymbol{|z| - z = i}$.

2- Soit $\boldsymbol{z' = \dfrac{(3+4i)\,z + 5\,\bar{z}}{6}}$.

- **a)** Montrer que si $z' = z$, alors M appartient à une ligne droite (D) dont l'équation est $y = \frac{x}{2}$.
- **b)** Calculer $\tan(\arg z')$ dans le cas lorsque z est un imaginaire pure.

II-(5 points) Soit le cercle (C) d'équation $\boldsymbol{x^2 + y^2 - 4y = 0}$.

1- Trouver les coordonnées du centre et le rayon de (C), et puis les coordonnées des points d'intersection A et B de (C) avec l'axe Oy.

2- on considère la ligne droite (d_m) d'équation $\boldsymbol{mx + y - 1 = 0}$, ou m est un paramètre réel.

- **a)** Montrer que, pour tout m, la droite (d_m) passe par un point fixe, à déterminer.
  Déduire que, pour tout m, (d_m) coupe(C) .
- **b)** Montrer que les abscisses des points d'intersection de (d_m) avec (C) satisfait l'équation $\boldsymbol{(1+m^2)x^2 + 2mx - 3 = 0}$, et encore déduire que $\forall m \in \mathbb{R}$, (d_m) coupe (C) en deux points.

III-(12 points) On considère la fonction f definie sur $\mathbb{R}$ par : $\boldsymbol{f(x) = \frac{1}{5}(ax+b)\,e^{-x}}$; ou a, b sont réels. La courbe représentative (γ) de f passe par le point A (0,2), et admet une valeur maximum au point d'abscisse $x = -1$.

1. Trouver les valeurs de a et b.
2. Soit $\boldsymbol{f(x) = (x+2)\,e^{-x}}$. Résoudre l'équation $f(x) = 0$.
3. Calculer, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$, et déduire l'asymptote de (γ).
4. Établir le sens de variation de $f(x)$ sur $\mathbb{R}$, et tracer ca courbe (γ) dans un repère direct orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$. Soit ***l'unité* = 2 cm.**
5. Montrer que $\boldsymbol{F(x) = -(x+3)\,e^{-x}}$ est une primitive de f, et Calculer l'aire de la région Δ du plan, située entre la courbe (γ), l'axe d'abscisses el les deux droites d'équation : $x = -2$ et $x = 0$.
6. Trouver graphiquement, suivante les valeurs de $m \in [0, e]$, le nombre et signe des racines de l'équation : $m - f(x) = 0$.
7. Soit $\boldsymbol{g(x) = \ln[\,f(x)\,]\,;\; x > -2}$. En utilisant les résultats obtenus pour f et ça courbe :
   - **a)** Trouver $\lim\limits_{x\to-2^+} g(x)$, et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$.

     Indication : On sait que si h est continue au c alors $\lim\limits_{x\to c} \ln[h(x)] = \ln[\lim\limits_{x\to c} h(x)]$.
   - **b)** Calculer $g'(x)$ et dresser le tableau des variations de $g(x)$ sur l'intervalle $]-2,+\infty[$.

IV-(8 points) L'espace est rapporté à un repère direct orthonormé $\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\right)$. On considère le plan

$(\boldsymbol{P_m})$: $\boldsymbol{2x+\left(m^2-1\right)y-z-1=0}$; Ou m est un paramètre réel.

1- Montrer que tous les plans (P_m) admettent une ligné d'intersection d'équation $\boldsymbol{2x-z-1=0}$, située dans le plan Oxz.

2- Déterminer m tel que la ligne d'intersection de (P_m) avec le plan Oxy est $\boldsymbol{2x+3y-1=0}$.

3- Soit $(\boldsymbol{R})$ un plan d'équation $\boldsymbol{2x-4y-z=0}$.

- **a)** Déterminer m tel que (P_m) est parallèle à (R).
- **b)** Déterminer m tel que (P_m) est perpendiculaire à (R).

4- On considère le plan $(\boldsymbol{P_1})$ correspondant à valeur $\boldsymbol{m=1}$, de la famille des plans (P_m), et le plan $(\boldsymbol{Q})$ d'équation $\boldsymbol{x+y-3=0}$.

- **a)** Vérifier que chacun des points $A(2,1,3)$ et $B(3,0,5)$ appartient aux plans (P_1)et (Q) simultanément.
- **b)** Trouver l'équation de la droite (L) d'intersection des plans(P_1) et (Q).
- **c)** Est-ce que l'axe Oz coupe le plan (Q)? Justifier.
- **d)** Vérifier que la droite $(\boldsymbol{D})$: $\begin{cases} \boldsymbol{x=t+1} \\ \boldsymbol{y=1} \\ \boldsymbol{z=2t+1} \end{cases}$ appartient au plan (P_1).
- **e)** Est-ce que le point $A(2,1,3)\ \epsilon\ (D)$? Justifier. Déduire le point d'intersection de (L) et(D).

IV-(6 points) On considère deux urnes **A** et **B**. Urne **A** contient **9** objets dont **3** sont défectueux, et urne **B** contient **7** objets dont **3** sont défectueux.

1- On tire **deux** objets de l'urne **A**, et on noter les éventements suivantes : ***DD*** : deux objets défectueux; ***NN :*** deux objets non-défectueux; ***DN*** : un objet défectueux et l'autre non-défectueux.

- **a)** Calculer P***(DD)***, la probabilité de l'éventent ***DD.***
- **b)** Calculer P***(NN)***, la probabilité de l'éventent ***NN.***
- **c)** Calculer P***(DN)***, la probabilité de l'éventent ***DN.***

2- Dans cette partie, on tire trois objets de l'urne **B** d'une façon suivant :

On tire le premier objet sans le remettre dans l'urne, puis on tire le second objet et on le remet dans l'urne, et finalement on tire le troisième objet. Vérifier que la probabilité des trois objets tires sont défectueux est égale à $1/21$.

3- Maintenant on retire, d'une manière aléatoire, un objet de chaque urne **A** et **B.**

- **a)** Quelle est la probabilité P_1 que les deux objets tires soient défectueux.
- **b)** Quelle est la probabilité P_2 d'avoir un objet défectueux et l'autre non défectueux.